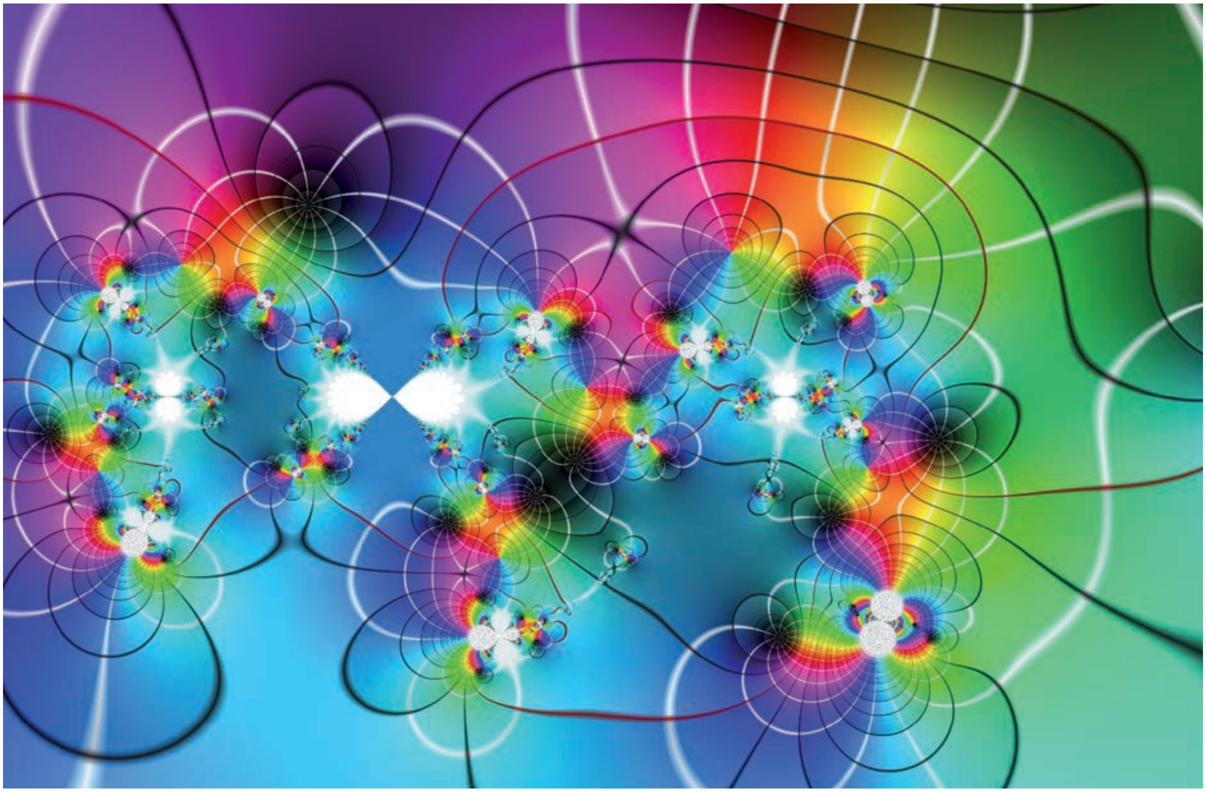
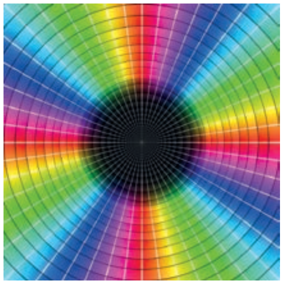
Gebietseinfärbung ...



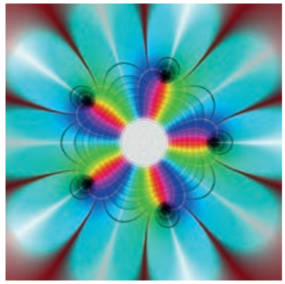
Visualisierung einer komplexwertigen Funktion

Komplexe Funktionen (in einer Variablen) sind Abbildungen von der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Zur Visualisierung verwenden wir hier eine neue Entwicklung der Gebietseinfärbung, bei der wesentliche Eigenschaften der Funktion farblich dargestellt werden. Längs schwarzer Linien sind die Beträge der Funktionswerte konstant, und längs weißer Linien das Argument. Nullstellen und Polstellen sind an schwarzen bzw. weißen Punktzentren erkenntlich, die hier zwölf oder mehr einlaufende, weiße Linien besitzen. Wesentliche Singularitäten liegen bei den großen, weißen Bereichen mit den unendlich vielen, feinen Regenbogenmustern.

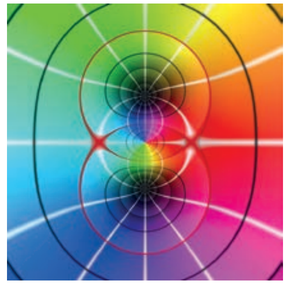
Farbschema bzw. $f(z) = z$



$f(z) = z^4$



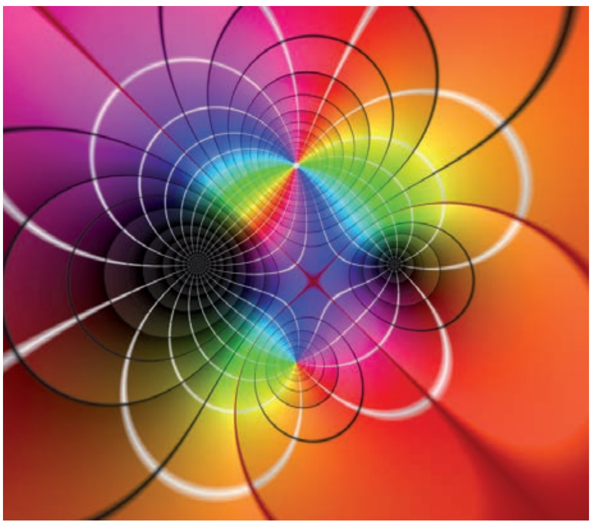
$f(z) = 1/(z^5 - 1)$



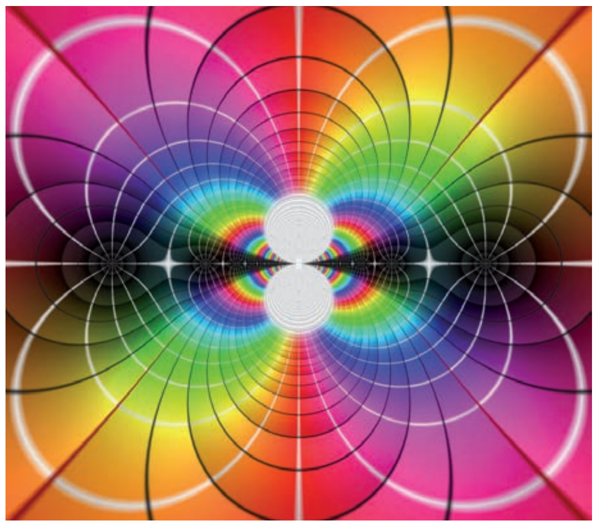
$f(z) = (z - i)(z + i)/z$

Bei der Gebietseinfärbung (engl.: domain coloring) einer Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird der Definitionsbereich Ω anhand der Funktionswerte eingefärbt. Hierzu versieht man den Bildraum $\mathbb{C}$ der Funktion mit einem Farbschema, wobei technisch eine Funktion col: $\mathbb{C} \to$ *Farbraum* verwendet wird, die jedem Funktionswert eine charakteristische Farbe zuordnet. Nun wird aus der komplexen Funktion f und der Farbfunktion col eine Einfärbung des Definitionsbereiches erstellt: jeder Punkt $z \in \Omega$ erhält den Farbwert col$(f(z))$, wird also anhand des Funktionswertes von f an dieser Stelle eingefärbt. Das hier verwendete Farbschema ist oben links gezeigt, und es ist gleichzeitig als Einfärbung von $f(z)=z$ interpretierbar.

Meromorphe Funktion
$f(z) = (z-1)(z+1)^2/((z+i)(z-i)^2)$

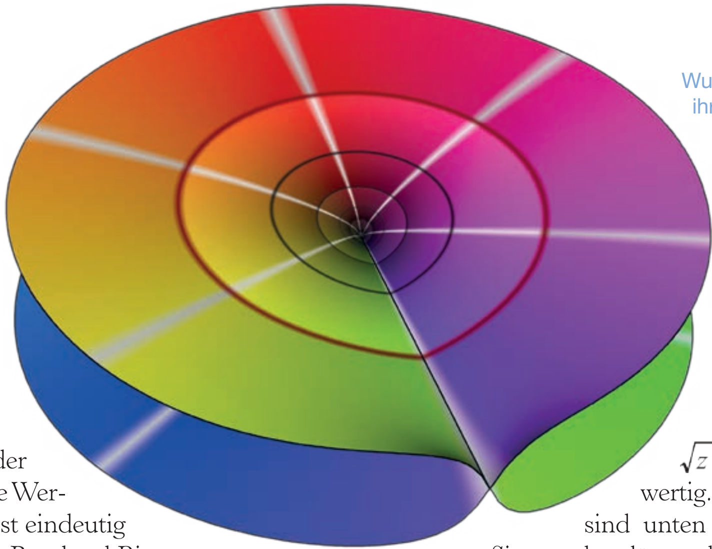


Funktion $f(z) = z\sin(1/z)$
mit wesentlicher Singularität



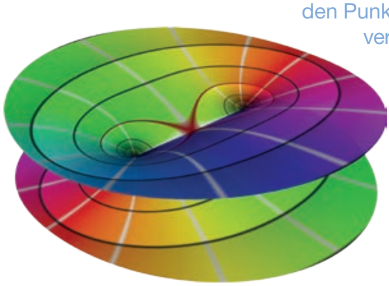
K. Poelke, K. Polthier *Lifted Domain Coloring* Computer Graphics Forum 28 (3), 2009
F. A. Farris *www.maa.org/pubs/amm_complements/complex.html* Visualizing complex-valued functions on the plane

… und Riemann'sche Flächen



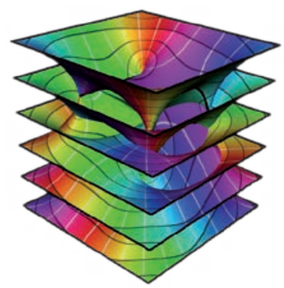
Wurzelfunktion $\sqrt{z}$ ist auf ihrer Riemann'schen Fläche eingefärbt. Die Fläche besteht aus zwei Blättern, die längs der negativen reellen Achse verklebt und bei $z = 0$ verzweigt sind.

Die Wurzelfunktion $\sqrt{z}$ sowie viele andere Funktionen sind mehrwertig und besitzen an jeder Stelle der komplexen Ebene zwei oder mehr Funktionswerte. Zum Beispiel hat $\sqrt{1}$ die Werte 1 oder –1, ebenso hat $\sqrt{-1}$ die Werte i und $-i$, nur $\sqrt{0}$ ist eindeutig 0. Nach einer Idee von Bernhard Riemann werden mehrwertige Funktionen allerdings eindeutig, wenn man als Definitionsbereich geeignete verzweigte Überlagerungen der komplexen Ebene verwendet. Für die Wurzelfunktion, die fast überall zweiwertig ist, verwendet man eine zweifache Überlagerung (oben). Auch die Funktion $\sqrt{z-1}\,\sqrt{z+1}$ ist zweiwertig. Ihre beiden Blätter sind unten als Quadrate gezeigt. Sie werden längs der Verbindungsstrecke der zwei Verzweigungspunkte -1 und +1 zusammengeheftet, und dabei blau mit blau und grün mit grün verbunden. Auf der räumlichen Darstellung (links unten) entsteht dadurch ein kontinuierlicher Farbverlauf.



Die Riemann'sche Fläche der Funktion $\sqrt{z-1}\,\sqrt{z+1}$ ist an den Punkten $z = 1$ und $z = -1$ verzweigt, ähnlich wie die Wurzelfunktion oben.

Sechsfach überlagernde Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten.



M. Nieser, K. Poelke, K. Polthier *Automatic Generation of Riemann Surface Meshes* GMP 2010, Springer LNCS 6130, 161-178
H. Weyl *Die Idee der Riemannschen Fläche* Teubner 1913

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

Die klassisch schöne Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

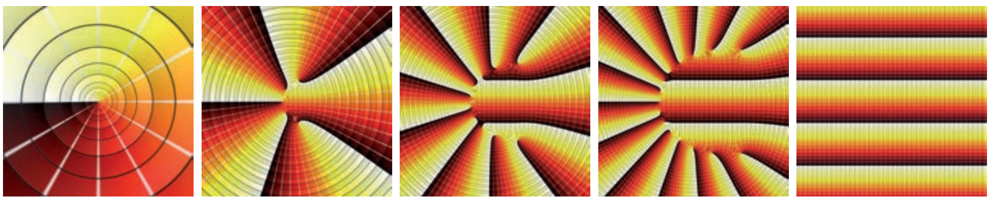
Die Exponentialfunktion besitzt weder im Reellen noch im Komplexen eine Nullstelle. Nun betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Ordnung n ohne Restglied:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

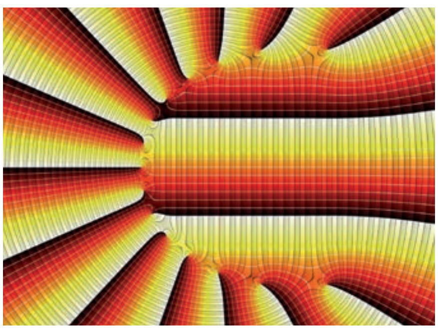
Es handelt sich um Polynome in z, welche die Funktion umso besser annähern, je größer n ist. Solche Polynome haben jedoch mit wachsendem Grad dementsprechend viele Nullstellen. Ein Widerspruch?

Die Erklärung liegt darin, dass die Polynome ja nur innerhalb eines gewissen, immer größer werdenden, Radius um den Ursprung die Exponentialfunktion gut annähern. Weiter außen tendieren die Polynome dazu „auszuscheren" und viele Nullstellen zu besitzen. Erst wenn n unendlich groß ist, ist die gesamte Exponentialfunktion dargestellt.

Approximation der Exponentialfunktion durch Polynome



$P_1(z)$ $P_5(z)$ $P_{10}(z)$ $P_{15}(z)$ e^z



Die obige Bilderserie zeigt von links startend die Taylor-Polynome der Ordnung 1, 5, 10 und 15 sowie rechts die Exponentialfunktion, jeweils im Bereich $z = \pm 14 \pm 14i$. Das verwendete Farbschema ist ein Fächer von Schwarz über Rot und Gelb nach Weiß. Vom Nullpunkt ausgehende, radiale Strahlen sind weiß gefärbt. Man erkennt Nullstellen daran, dass lokal gesehen eine Trennlinie des weiß-schwarzen Bereichs „ausläuft". Das geschulte Auge sieht, wie die Nullstellen mit wachsendem Polynomgrad immer weiter vom Zentrum hinausgedrängt werden. Das Bild links zeigt eine Vergrößerung für $n = 15$.

Bilder von Konstantin Poelke nach einer Idee von Hans Lundmark

H. Lundmark *www.mai.liu.se/~halun/complex/taylor* Taylor polynomials of the exponential function – Universität Linköpings

F. Labelle *www.cs.berkeley.edu/~flab/complex/gallery2.html* The Maclaurin series of exp(z) – Berkeley University of California

G. Abdo *http://my.fit.edu/~gabdo/function.html* Plotting Functions of a Complex Variable – Florida Institute of Technology