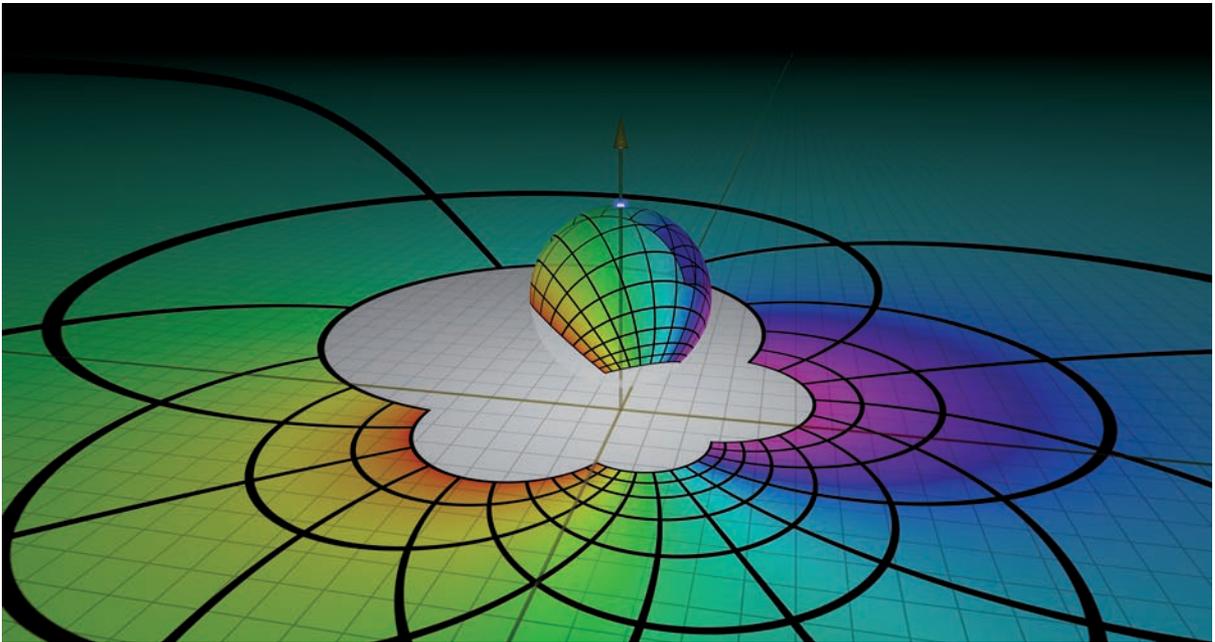
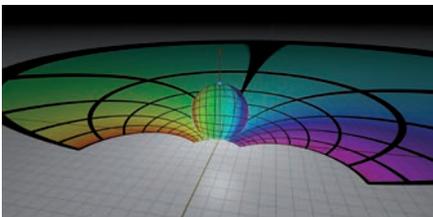


Möbius-Transformationen



Möbius-Transformationen sind eine reichhaltige Klasse von winkelerhaltenden Abbildungen der Ebene in sich selbst. Zur Veranschaulichung betrachten wir die Bilder eines Einheitsquadrats, welches durch Möbius-Transformationen in viele krummlinige Figuren ab-

gebildet wird. Eine besonders intuitive Interpretation der Möbius-Transformationen geht auf *Bernhard Riemann* zurück und wurde von *Douglas Arnold* und *Jonathan Rogness* eindrucksvoll visualisiert.

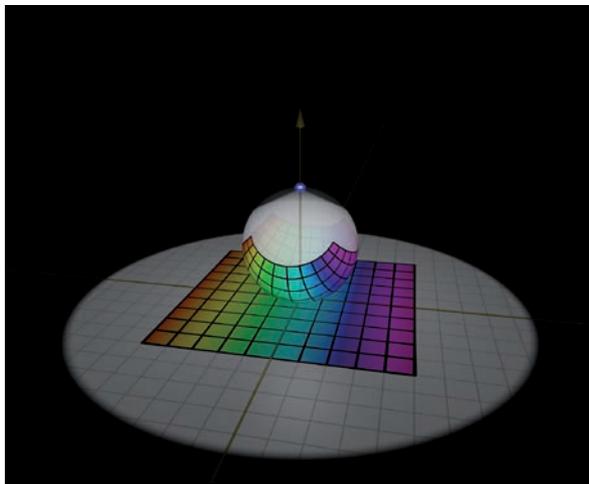


← Winkeltreue Verzerrung des Einheitsquadrats

Inversion am Einheitskreis sendet z nach $1/\bar{z}$ →



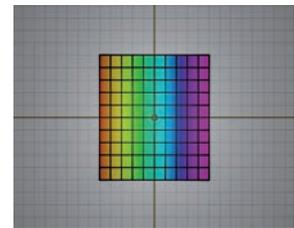
... aus Bewegungen der Kugel



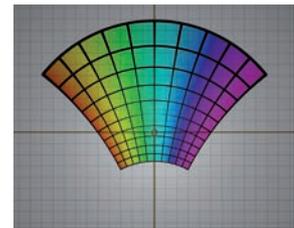
Interpretation des Einheitsquadrats als Projektion von einem sphärischen Quadrat, welches durch eine Lampe am Nordpol auf die Ebene projiziert wird.



Einheitsquadrat



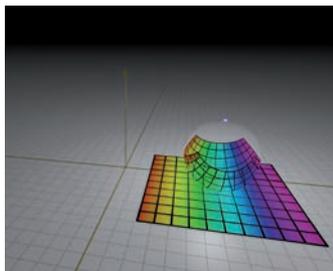
Winkeltreu verzerrtes Einheitsquadrat



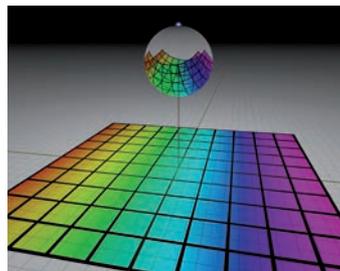
Die vier Typen von Möbius-Transformationen – Verschiebung, Streckung, Drehung und Inversion – lassen sich elegant durch entsprechende Bewegungen einer beleuchteten Sphäre beschreiben. Verschieben der Sphäre bewegt das Quadrat, Anhebung der Sphäre führt zu einer Streckung, und Drehung der Sphäre liefert sowohl alle Drehungen des Quadrats als auch die

Inversion. Wird nämlich die Sphäre auf den Kopf gedreht, dann wird das Innere des Einheitskreises nach außen gekehrt, und dementsprechend der Mittelpunkt des Quadrats nach Unendlich geschickt. Anhand der Möbius-Transformation können wir anschaulich verstehen, dass sich viele Abbildungen in der Ebene einfacher auf der Kugeloberfläche verstehen lassen.

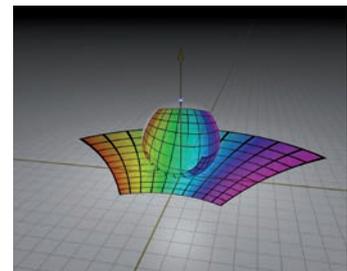
Translation des Quadrats durch Verschiebung der Sphäre



Vergrößerung des Quadrats durch Anhebung der Sphäre



Weitere Verzerrungen des Quadrats durch Drehung der Sphäre



Bilder von Douglas Arnold, Jonathan Rogness

D. Arnold, J. Rogness *Möbius-Transformationen beleuchtet* in: MathFilm Festival 2008, Springer Verlag, DVD, 2008
 MathFilm Festival 2008 www.mathfilm2008.de/2008.003.02 Möbius-Transformationen beleuchtet

