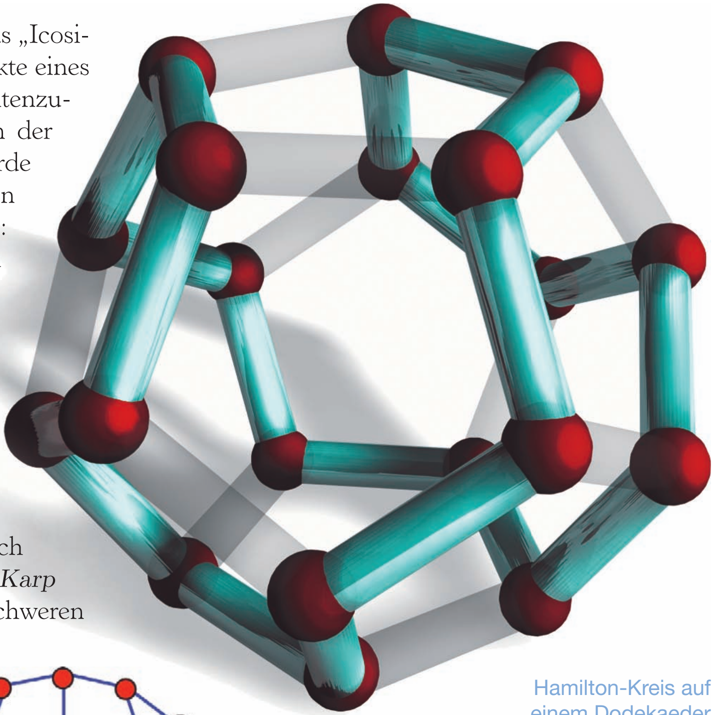
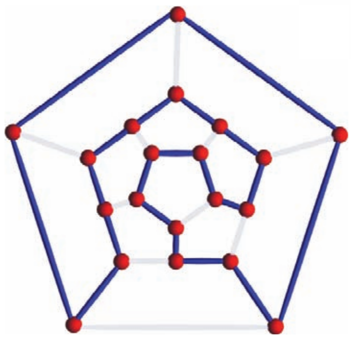
Hamilton-Kreise
und das Icosische Spiel

Sir William Hamilton erfand im Jahr 1857 das „Icosische Spiel“, bei dem es darum geht, alle Punkte eines Dodekaeders längs eines geschlossenen Kantenzuges genau einmal zu besuchen. Auch wenn der kommerzielle Erfolg bescheiden blieb, so wurde der Name Hamilton-Kreis bekannt für einen Typ von geschlossenen Kurven auf Graphen: Alle Punkte eines Graphen sollen auf einem geschlossenen Kantenweg genau einmal besucht werden.

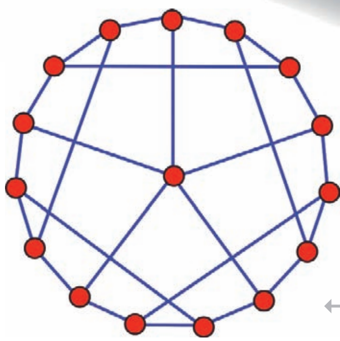


Hamilton-Kreis auf einem Dodekaeder

Für die Kantengraphen der platonischen Körper kennt man Hamilton-Kreise, für das Beispiel von *William F. Lindgren* gibt es keinen Hamilton-Kreis. Die Frage der Entscheidbarkeit, ob ein vorgegebener Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, ist algorithmisch nicht leicht zu beantworten. Nach *Richard Karp* (1972) gehört die Frage zur Klasse der NP-schweren Probleme.



Hamilton-Kreis auf einem Dodekaeder, gezeichnet im Schlegel-Diagramm



Graph von Lindgren

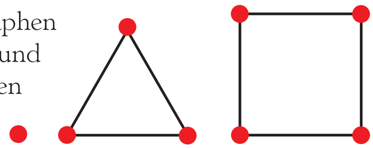
← Der links abgebildete Graph von Lindgren ist ein hypohamiltonischer Graph. Solch ein Graph besitzt zwar keinen Hamilton-Kreis, allerdings enthält er nach Entfernung eines beliebigen seiner roten Eckpunkte und angrenzenden Kanten einen Hamilton-Kreis.

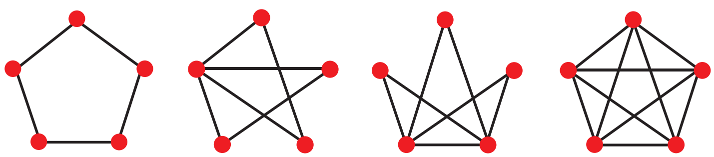
J. Dalgety *http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm* The Icosian Game – Puzzle Museum
Wikipedia *http://de.wikipedia.org/wiki/Hamilton-Kreisproblem* Hamilton-Kreisproblem
Wikipedia *http://de.wikipedia.org/wiki/Karps_21_NP-vollständige_Probleme* Karps 21 NP-vollständige Probleme
WolframMathWorld *http://mathworld.wolfram.com/HamiltonianCircuit.html* Hamiltonian Circuit

... und Euler-Kreise
und die Königsberger Brücken

In Königsberg gab es früher sieben Brücken, um die sich das folgende Problem rankte: „Gibt es einen geschlossenen Weg, der über jede Brücke genau einmal verläuft, touristisch gesehen also effizient ist?“. *Leonhard Euler* konnte in einer der ersten Arbeiten zur Graphentheorie Abhilfe schaffen. Abstrahiert man das Problem, so erhält man einen Graphen (s. rechts in der Mitte) und sucht nach einem Euler-Kreis: Ein geschlossener Weg durch einen Graphen, der jede Kante exakt einmal durchläuft. Der Graph des Brückenproblems besteht aus vier Punkten und sieben Kanten. Drei Punkte haben Valenz 3, also eine ungerade Anzahl von verbundenen Kanten. Punkte mit ungerader Valenz müssen Start oder Ziel einer Reise sein, also kann es in Königsberg keinen Euler-Kreis geben.

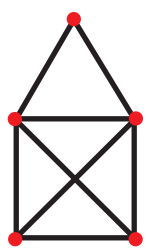
Euler-Kreise bei einfachen Graphen mit wenigen Ecken. Bei vier und weniger Ecken gibt es nur den einfachen Rundlauf.

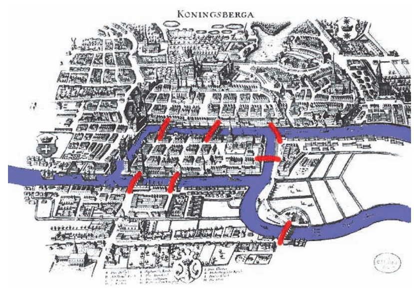




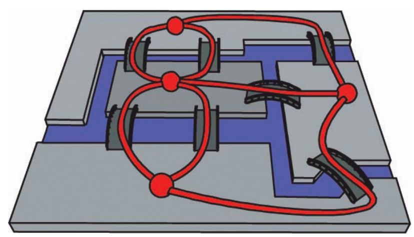
Unter den einfachen Graphen mit fünf Ecken besitzen genau obige vier Graphen einen Euler-Kreis.

Das Haus des Nikolaus besitzt keinen Euler-Kreis: Die klassische Nikolausroute durchläuft zwar jede Kante genau einmal, der Pfad ist jedoch nicht geschlossen.

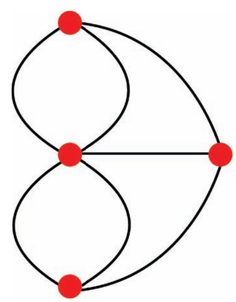




Die sieben Brücken von Königsberg



Übersetzung in einen Graphen



Äquivalenter Graph des Brückenproblems

Rundfunk Berlin-Brandenburg *www.preussen-chronik.de/_/bild_jsp/key=bild_kathe2.html* Königsberg 1652 – Stich von Merian-Erben
via: Wikipedia *http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg*