

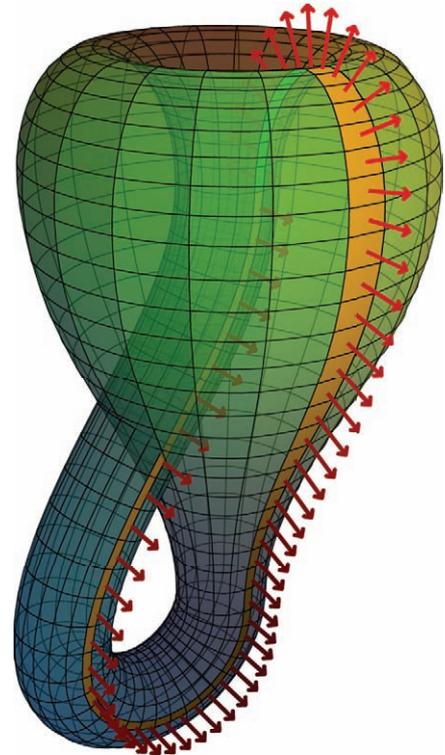
## Die Klein'sche Flasche

Die Klein'sche Flasche ist eine nicht-orientierbare Fläche, die weder ein Inneres noch ein Äußeres besitzt. Auf der Oberfläche liegen zwei Möbiusbänder, längs derer man kontinuierlich zu beiden Seiten eines jeden Flächenpunktes gelangen kann. Das zweite Möbiusband liegt auf der rückwärtigen Seite, symmetrisch zum gezeigten Farbband.

*Felix Klein* (1848–1925) hat diese nicht-orientierbare Flasche bei Überlegungen zur Klassifizierung von topologischen Flächen zum ersten Mal entdeckt.

### Theoretische Konstruktion

Man nehme ein Blatt Papier und rolle es zu einem Zylinder. Zur besseren Darstellung unterscheiden wir zunächst die grüne Innenseite von der weißen Außenseite. Nun biege man das untere Zylinderende nach oben und führe es, leicht erweiternd, nach oben zum anderen Ende, wie dargestellt. Die Theorie ist praktisch leider nicht durchführbar, da die unvermeidliche Selbstdurchdringung mit Papier nicht realisiert werden kann: Dafür muss man idealisiertes Papier verwenden oder die mathematische Anschauung bemühen.

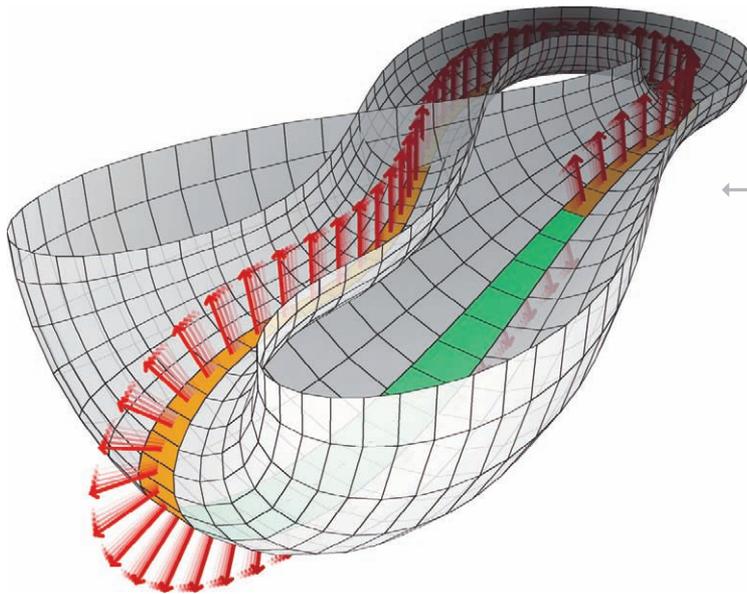


K. Polthier *Inside the Klein Bottle* Plus Magazin, Cambridge, 2003

F. Klein *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* Teubner, 1882, S. 80

T. F. Banchoff [www.math.brown.edu/~banchoff/art/PAC-9603/tour/klein/klein.html](http://www.math.brown.edu/~banchoff/art/PAC-9603/tour/klein/klein.html) The Klein Bottle

Georg-August-Universität Göttingen [www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende\\_Mathematiker/klein.html](http://www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende_Mathematiker/klein.html) Felix Klein

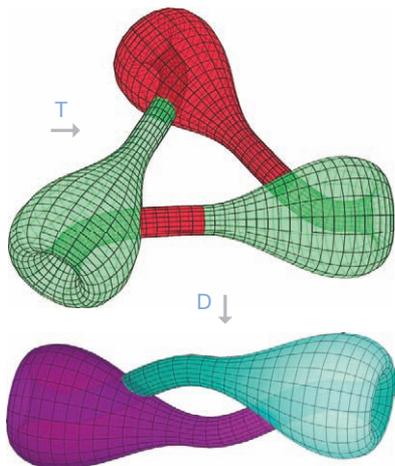


Die grünen und gelben Seiten des Möbiusbandes auf der Klein'schen Flasche sind verdreht aneinander geklebt. Dadurch kann ein senkrecht stehender Normalenvektor kontinuierlich zwischen beiden Seiten des Möbiusbandes bewegt werden.

Die abgebildete reale Klein'sche Flasche aus Glas wurde von *Werner Herr* geschaffen und durch Zugabe von etwas Kalium-Permanganat farblich hervorgehoben. Viele weitere Glasmodelle kann man von *Cliff Stoll* erwerben.



**Aufgabe**



Links sind zwei Variationen der Klein'schen Flasche dargestellt: die Doppelflasche (D) und die Tripelflasche (T).

Welche der beiden Flächen ist orientierbar?

- D
- T
- D + T
- keine

